

20.B

The Poincaré duality theorem

20.2 The definition of the cap product

Construction. (cap 積) $\Delta' : \text{対角 } X \rightarrow X \times X \text{ の cellular approx.}$

$$\alpha \otimes \beta \xrightarrow{\quad\quad\quad} \alpha \cap \beta$$

$$\begin{array}{c} C^*(X; \pi) \\ \otimes \\ C_*(X; R) \end{array} \xrightarrow{\Delta'_*} \begin{array}{c} C^*(X; R) \\ \otimes \\ C_*\left(\begin{smallmatrix} X \\ \times \\ X \end{smallmatrix}; R\right) \end{array} \cong \begin{array}{c} C^*(X; R) \\ \otimes \\ C_*(X; R) \end{array} \xrightarrow{ev} \begin{array}{c} \pi \\ \otimes \\ C_*(X; \pi) \end{array}$$

$C_*(X; R) = C_*(X; R)$

ev は 異なる
次数では
存在して

$$\begin{array}{c} C^q(X; \pi) \\ \otimes \\ C_p(X; R) \end{array} \xrightarrow{\Delta'_*} \begin{array}{c} C^q(X; R) \\ \otimes \\ C_p\left(\begin{smallmatrix} X \\ \times \\ X \end{smallmatrix}; R\right) \end{array} \cong \begin{array}{c} C^q(X; R) \\ \otimes \\ C_{p-q}(X; R) \end{array} \xrightarrow{ev} \begin{array}{c} \pi \\ \otimes \\ C_{p-q}(X; \pi) \end{array}$$

$C_{p-q}(X; R) = C_{p-q}(X; R)$

$$\begin{aligned} & (ev \circ d)(\alpha \otimes \beta) \\ &= ev(d\alpha \otimes \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \otimes d\beta) \\ &= (d\alpha)(\beta) + (-1)^{\deg \alpha} \alpha(d\beta) \\ &= (-1)^{\deg \beta} \alpha(d\beta) + (-1)^{\deg \alpha} \alpha(d\beta) = 0 \end{aligned}$$

よ' ev は chain map.

$$\begin{array}{c} C^{*-1}(X; R) \\ \otimes \\ C_*(X; R) \end{array} \xrightarrow{\quad\quad\quad} 0$$

$$\begin{array}{c} d \downarrow \qquad \qquad d \downarrow \\ C^*(X; R) \\ \otimes \\ C_*(X; R) \end{array} \xrightarrow{ev} \pi$$

$\longrightarrow$ cap 積 は chain map. かつ $d(\alpha \cap \beta) = d\alpha \cap \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \cap d\beta$

$$\begin{array}{c} H^*(X; \pi) \\ \otimes \\ H_*(X; R) \end{array} \xrightarrow{\quad\quad\quad} H_* \left[\begin{array}{c} C^*(X; \pi) \\ \otimes \\ C_*(X; R) \end{array} \right] \xrightarrow{\quad\quad\quad} H_*(X; \pi)$$

$$\begin{array}{c} H^q(X; \pi) \\ \otimes \\ H_p(X; R) \end{array} \xrightarrow{\quad\quad\quad} H_{p-q}(X; \pi)$$

Def. (cap product) 上の図式で cap 積を定める.

$$\begin{array}{ll} C^*(X; \pi) \otimes C_*(X; R) \xrightarrow{\quad\quad\quad} C_*(X; R) & H^*(X; \pi) \otimes H_*(X; R) \xrightarrow{\quad\quad\quad} H_*(X; \pi) \\ C^q(X; \pi) \otimes C_p(X; R) \xrightarrow{\quad\quad\quad} C_{p-q}(X; \pi) & H^q(X; \pi) \otimes H_p(X; R) \xrightarrow{\quad\quad\quad} H_{p-q}(X; \pi) \end{array}$$

$$C_*\left(\begin{smallmatrix} X \\ \times \\ X \end{smallmatrix}; R\right)^\vee \cong \begin{bmatrix} C_*(X; R) \\ \otimes \\ C_*(X; R) \end{bmatrix}^\vee$$

$$\star \supseteq \parallel$$

$$C_*(X; R)^\vee$$

$$\otimes$$

$$C_*(X; R)^\vee$$

$$\parallel$$

$$\begin{array}{ccc} C_*(X; R) \xleftarrow{\Delta'^*} C_*\left(\begin{smallmatrix} X \\ \times \\ X \end{smallmatrix}; R\right) \cong \begin{array}{c} C_*(X; R) \\ \otimes \\ C_*(X; R) \end{array} & \xrightarrow{\text{ev}_x} & C_*(X; R) \\ \otimes & & \otimes \\ C_*(X; R) \xrightarrow{\Delta'_*} C_*\left(\begin{smallmatrix} X \\ \times \\ X \end{smallmatrix}; R\right) \cong \begin{array}{c} C_*(X; R) \\ \otimes \\ C_*(X; R) \end{array} & \xrightarrow{\text{ev}_x} & C_*(X; R) \\ \downarrow \text{ev}_x & \Delta'^* \text{ の定義} & \downarrow \text{ev}_{x \times x} \\ R & \xlongequal{\quad} & R \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha \cup \beta & \xleftarrow{\quad} & \alpha = \alpha \\ & \searrow & \beta \\ & & \beta \cap \gamma \\ \gamma & \xrightarrow{\quad} & \beta \cap \gamma \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle \alpha \cup \beta, \gamma \rangle & = & \langle \alpha, \beta \cap \gamma \rangle \end{array}$$

Thm. (fundamental identity)

$$\begin{array}{ccc} H^{n-p}(X) \otimes H_{n-p}(X) & \xrightarrow{\langle \rangle} & R \\ \downarrow \cup \uparrow \cap & & \parallel \\ H^n(X) \otimes H_n(X) & \xrightarrow{\langle \rangle} & R \end{array} \quad \begin{array}{c} \langle \alpha, \beta \cap \gamma \rangle \\ \parallel \\ \langle \alpha \cup \beta, \gamma \rangle \end{array}$$

Construction. (relative cap 積) $\Delta' : \begin{array}{c} X \rightarrow X \times X \\ A \rightarrow A \times A \end{array}$ の cellular approx.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ C_*(A; R) \xrightarrow{\Delta'_*} C_*\left(\begin{smallmatrix} A \\ \times \\ A \end{smallmatrix}; R\right) \\ \downarrow \\ C_*(X; R) \xrightarrow{\Delta'_*} C_*\left(\begin{smallmatrix} X \\ \times \\ X \end{smallmatrix}; R\right) \\ \downarrow \\ C_*(X, A; R) \\ \downarrow \\ 0 \\ \vdots \\ \text{ex.} \end{array} & \xrightarrow{\Delta'_*} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ C_*(A; R) \rightarrow C_*(X; R) \\ \otimes \\ C_*(A; R) = C_*(A; R) \\ \downarrow \\ C_*(X; R) \\ \otimes \\ C_*(X; R) \\ \downarrow \\ C_*(X; R) \\ \otimes \\ C_*(X, A; R) \\ \downarrow \\ 0 \\ \vdots \\ \text{ex.} \end{array} \end{array} \end{array}$$

逆方向の同型: $H^*(X, A; R) \xrightarrow{\cap} H^*(X; R)$

同型: $H^*(X; R) \xrightarrow{\cap} H^*(X, A; R)$

20.5. The proof of the Poincaré duality theorem

Def. $H_c^q(X) := \varinjlim_{\substack{K \subseteq X \\ \text{cpt}}} H^q(X, X-K)$: コンパクト台コホモロジー

proper map について反変関手性を持つが、今回使うのは $K \subseteq U \subseteq X$ に関する

$H^q(U, U-K) \rightarrow H^q(X, X-K)$ から誘導される $H_c^q(U) \rightarrow H_c^q(X)$: 共変関手性のみ.

以下 M : R -ori. mfd.

Ori. = fund. より $K \subseteq M \ni z_k \in H_n(M, M-K; R)$: R -基本類 が定まる.

$$D_k : H^p(M, M-K; R) \rightarrow H_{n-p}(M) ; \alpha \mapsto \alpha \cap z_k$$

は $K \subseteq L$ に関して 整合的 であり、 $\varinjlim$ において

$$D : H_c^p(M) \longrightarrow H_{n-p}(M) : \text{duality homomorphism.}$$

ひとつの R -ori. から
定まっている R -fund.
なので 整合する.

Thm. (Poincaré duality) M : R -ori. mfd.

$$D : H_c^p(M) \longrightarrow H_{n-p}(M) \text{ は同型.}$$

prf. $U \subseteq M$ に関する性質 「 $D : H_c^p(U) \rightarrow H_{n-p}(U)$ は同型 」

Step 1. $U \cong \mathbb{R}^n$: 4-1-1 で成立.

$\{ \text{開立方体} \subseteq \mathbb{R}^n \}$ は $\{ K \subseteq \mathbb{R}^n \}$ で共終より $K = \text{開立方体} : \text{可縮}$ のみ考えればよい.

$$H^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \cong H^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - pt) \ni z_{pt} \text{ は生成元より } D_k = - \cap z_k \text{ は同型.}$$

$$\leadsto D : H_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^n) \text{ は同型}$$

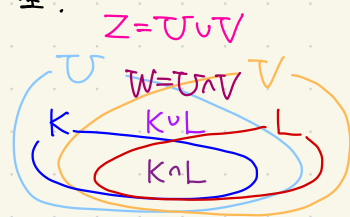
Step 2. $U, V, W = U \cap V$ で成立するならば $Z = U \cup V$ で成立.

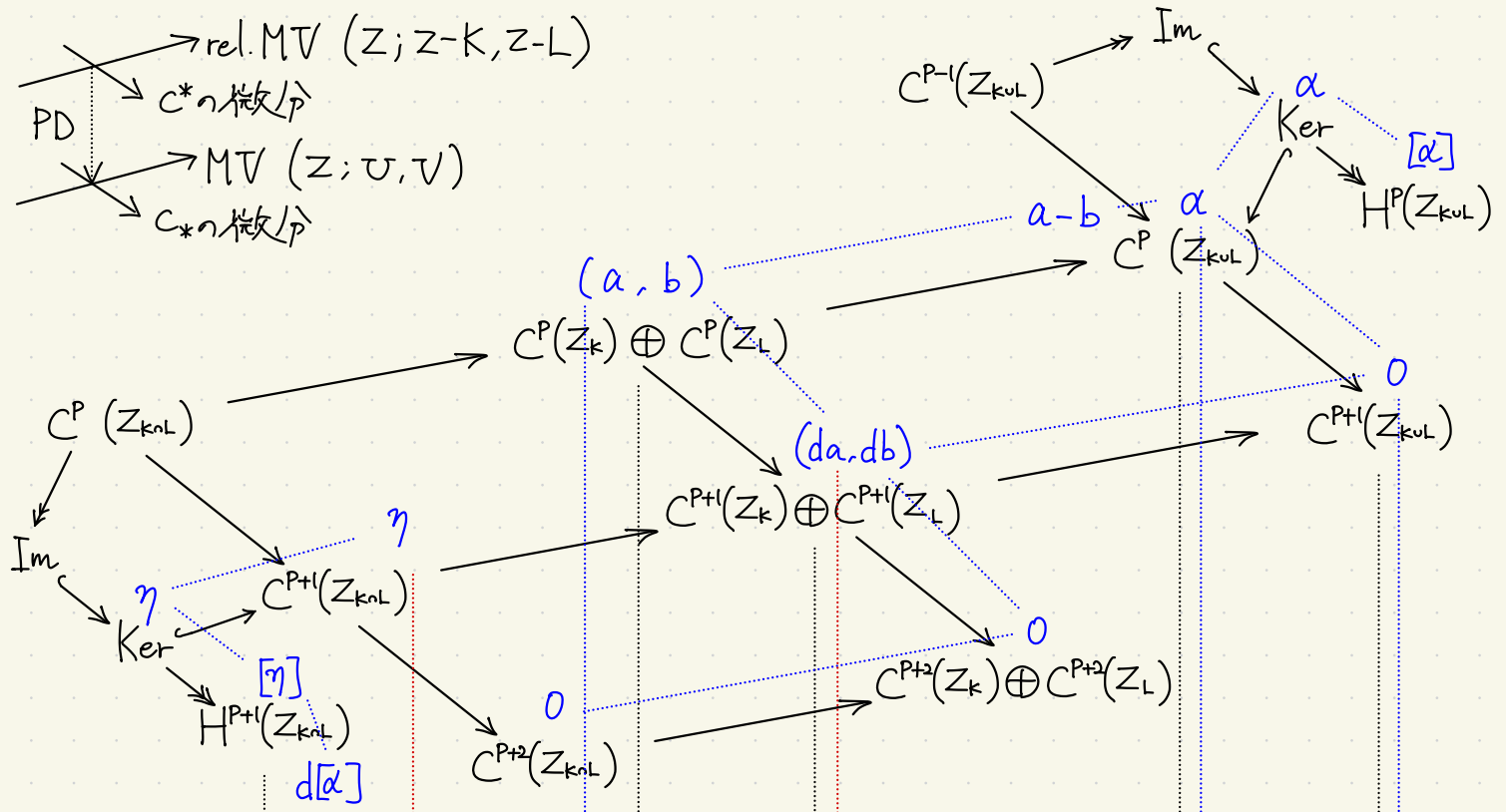
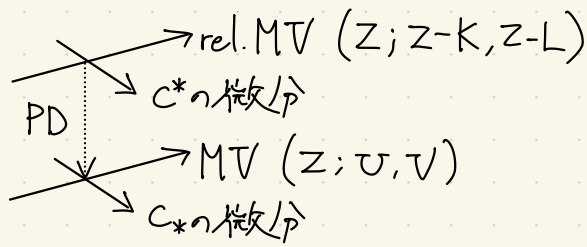
$\{ K \cup L \mid K \subseteq U, L \subseteq V \}$ は $\{ Z' \subseteq Z \}$ で共終より $K \cup L$ のみ考えればよい.

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(Z_{K \cup L}) & \longrightarrow & H^p(Z_K) \oplus H^p(Z_L) & \longrightarrow & H^p(Z_{K \cup L}) & \longrightarrow & H^{p+1}(Z_{K \cup L}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \parallel & & \downarrow \wr \text{ EXC by} \\ H^p(W_{K \cup L}) & \longrightarrow & H^p(U_K) \oplus H^p(V_L) & \longrightarrow & H^p(Z_{K \cup L}) & \xrightarrow{d} & H^{p+1}(W_{K \cup L}) \\ \downarrow D_{K \cup L} & & \downarrow D_K \oplus D_L & & \downarrow D_{K \cup L} & & \downarrow D_{K \cup L} \\ H_{n-p}(W) & \longrightarrow & H_{n-p}(U) \oplus H_{n-p}(V) & \longrightarrow & H_{n-p}(Z) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-p-1}(W) \end{array}$$

: Z ; $Z-K, Z-L$ の rel. MV ex.
: Z ; U, V の MV ex.

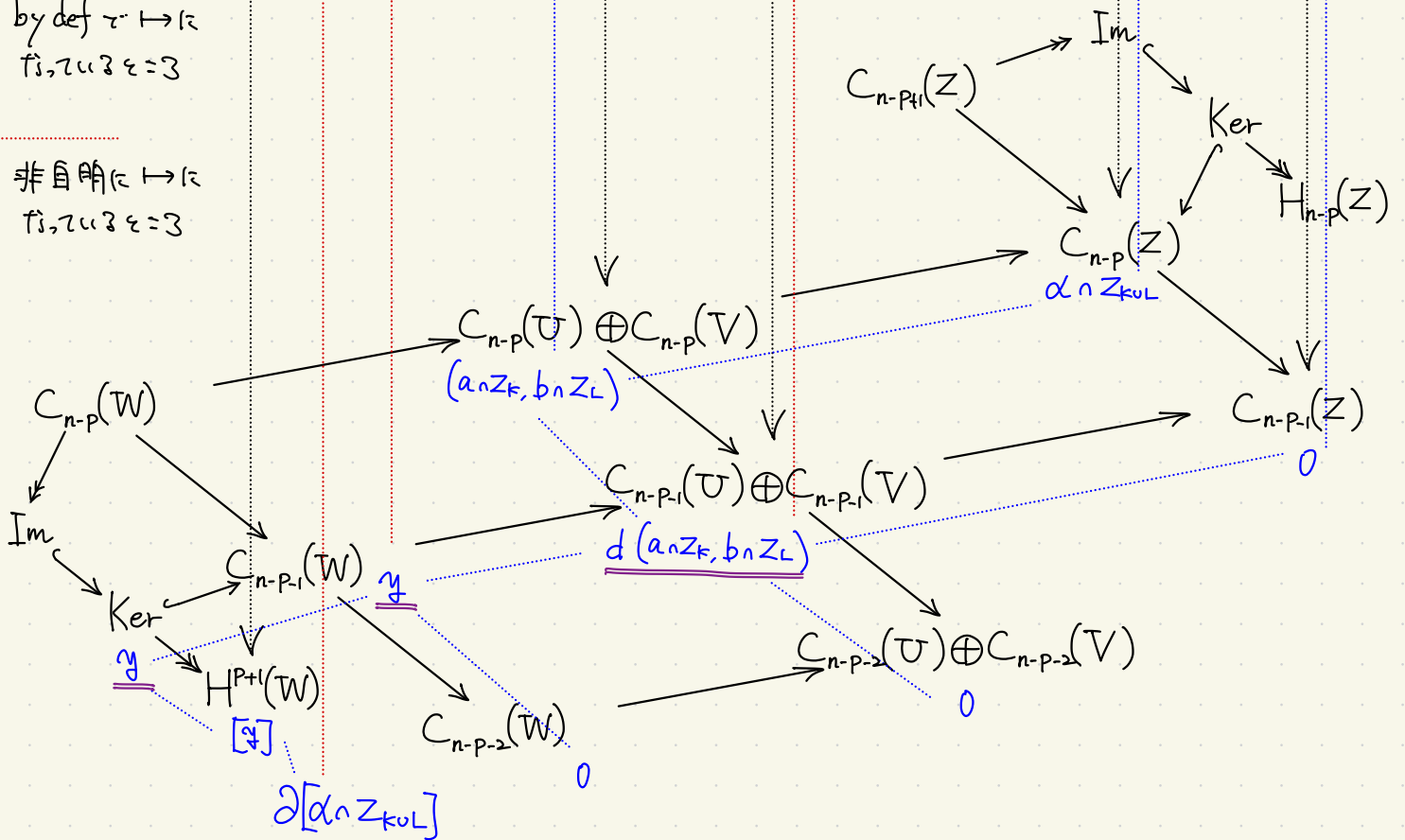
$\underbrace{H_{n-p}(W) \longrightarrow H_{n-p}(U) \oplus H_{n-p}(V)}_{\text{自然性より可換}} \quad \underbrace{H_{n-p}(Z) \xrightarrow{\partial} H_{n-p-1}(W)}_{\partial(\alpha \cap Z_{K \cup L}) = (d\alpha) \cap Z_{K \cup L}}$





by def $\tau \mapsto \tau$
 $\tau_3, \tau_{u3} \varepsilon = 3$

非自明 $\tau \mapsto \tau$
 $\tau_3, \tau_{u3} \varepsilon = 3$



$\underline{d(a_n Z_k, b_n Z_L)} \neq$
 $d(a_n Z_k) = d a_n Z_k + a_n d Z_k = 0$
 $d(b_n Z_L) = d b_n Z_L + b_n d Z_L = 0$
 $\therefore (d a_n Z_k, d b_n Z_L)$
 $\leadsto$ だいたい

Step 3. 開集合の全順序集合 $\{U_i\}$ τ -成立するな $U = \bigcup U_i$ τ -成立.

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{n-q}(U_i) & \text{colim}_{U_i} H_{n-q}(U_i) & = & H_{n-q}(U) \\
 \uparrow D & \uparrow D & & \uparrow D \\
 H_c^q(U_i) & \text{colim}_{U_i} H_c^q(U_i) & & \\
 & = \text{colim}_{U_i} \text{colim}_{\substack{K \subseteq U_i \\ \text{cpt}}} H^q(U_i, U_i - K) & & \\
 & = \text{colim}_{\substack{K \subseteq U \\ \text{cpt}}} \text{colim}_{U_i \supseteq K} H^q(U_i, U_i - K) & & \\
 \stackrel{\text{EXC}}{=} & \text{colim}_{\substack{K \subseteq U \\ \text{cpt}}} H^q(U, U - K) = H_c^q(U) & &
 \end{array}$$

Step 4. $U \subseteq \mathbb{R}^n$: τ -成立.

- U : 凸 な $U \cong \mathbb{R}^n$ がある τ -Step 1.
- $U = \bigcup_{i=1}^N U_i$ (U_i : 凸) な $U_i \cap U_j$: 凸 τ -Step 2.
- $U = \bigcup_{i=1}^\infty U_i$ (U_i : 凸) な $\{\bigcup_{i=1}^N U_i\}$: 全順序列 τ -Step 3.

Step 5. 任意の $U \subseteq M$ τ -成立.

Step 3. と Zorn より、性質を満たす最大の開集合 $V \subseteq U$ がある.

$\exists x \in U \setminus V$ な τ - $x \in W \subseteq U$ を取ると. V , W , $V \cap W$ ($\stackrel{\text{Step 1}}{\subseteq} W$: τ -成立し $\stackrel{\text{Step 4}}{\subseteq} W$: τ -成立し Step 2 より $V \cup W$ τ -成立. ζ .

□

20.1. Statement of the theorem

Cor. 1 M : conn, cpt, ori. n -mfd. z : 基本類

$T_p \subseteq H_p(M)$: torsion part. ($\mathbb{Z}$ 係数)

$$\Rightarrow H^p(M)/T_p \otimes H^{n-p}(M)/T_{n-p} \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{是非退化.}$$

$$\alpha, \beta \mapsto \langle \alpha \cup \beta, z \rangle$$

$$D: H^0(M) \cong H_n(M)$$

$$\mathbb{Z} \ni 1 \mapsto z: \text{基本類}$$

$$H^n(M) \cong H_0(M)$$

$$\xi \leftarrow 1 \in \mathbb{Z}$$

$$\langle \xi, z \rangle = 1.$$

prf.

o 是非 well-def. τ あり $z \in \dots$ $r\alpha = 0$ ($r > 0$) ならば, $\beta \in H^{n-p}(M)$ ならば $r(\alpha \cup \beta) = 0 \in \mathbb{Z} \sim \alpha \cup \beta = 0$.

o $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_r$, $H_p(M)$ は f.g. $\leadsto \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_p(M), \mathbb{Z})$ は torsion. (712)

$$\text{univ. coeff. } 0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{p-1}(M), \mathbb{Z}) \rightarrow H^p(M) \rightarrow \text{Hom}(H_p(M), \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{c} \text{torsion} \\ \leadsto = T_p. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{free} \\ = H^p(M)/T_p. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \text{ rk} \\ \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\exists \alpha \mapsto (\dots, 0, 1, 0, \dots) = \bar{\alpha}$$

$$\text{Im } \alpha = d\mathbb{Z} \text{ ならば } d(\bar{\alpha}/d) = \bar{\alpha} \text{ かつ } |d| = 1. \text{ i.e. } \exists \alpha \in H_p(M); \langle \alpha, a \rangle = 1.$$

$$a = PD(\beta) = \beta \cap z \text{ ならば } \langle \beta \cup \alpha, z \rangle = \langle \alpha, \beta \cap z \rangle = 1 \text{ かつ 是非退化.}$$

□

R -ori. $\leadsto$ いち以下に示す.

Cor. 2 R : 体 M : conn, cpt, R -ori. n -mfd. z : R -基本類

$$\Rightarrow H^p(M) \otimes H^{n-p}(M) \rightarrow R \quad \text{是非退化.}$$

$$\alpha, \beta \mapsto \langle \alpha \cup \beta, z \rangle$$

Cor. 3

次数環として $H^*(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ ($\deg \alpha = 2$).

prf. CW構造より加法群としてOK.

標準的な包含 $\mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ により $\mathbb{C}P^{n-1}$ は $\mathbb{C}P^n$ の $(2n-1)$ -骨格なので

$$\forall q < n, \quad H^{2q}(\mathbb{C}P^{n-1}) \cong H^{2q}(\mathbb{C}P^n).$$

$n=1$ $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ よりOK.

$$n > 1 \quad H^0 \oplus H^1 \oplus \dots \oplus H^{2n-4} \oplus H^{2n-2} \oplus H^{2n}$$

基底 $\langle 1 \rangle \quad \langle \alpha \rangle$

$\langle \alpha^{n-2} \rangle \quad \langle \alpha^{n-1} \rangle$

$\exists \beta$

$$\beta = d\alpha^{n-1} \neq 0$$

$$\langle \alpha\beta, z \rangle = d \langle \alpha^n, z \rangle$$

より $|d| = 1, \beta$ は生成元.

$$= \pm \alpha^{n-1}$$

$\alpha\beta$

$\downarrow$

$$H_0 \cong \mathbb{Z}$$

$\downarrow$ PD

Cor. 1 より $\exists \beta \in H^{2n-2}, \langle \alpha\beta, z \rangle = 1$

α^n は H^{2n} の生成元.

□.

同様に ($\mathbb{Z}_2$ -ori. 付の) $\mathbb{R}P^n \cong S^n$ かつ奇数 n

Cor. 4

次数環として $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ ($\deg \alpha = 1$).

20.6 The orientation cover

以下 不連結な covering も許す.

Construction. (Orientation cover)

M : conn., n -mfd.

① $p: \tilde{M} \rightarrow M$ を集合として

$$\begin{cases} \circ \tilde{M} = \{(x, \alpha) \mid x \in M, \alpha \in H_n(M_x) : \text{生成元}\} \\ \circ p(x, \alpha) = x \end{cases} \quad \text{と定めた.}$$

② $\langle U, \beta \rangle = \{(x, \alpha) \mid x \in U, \beta \mapsto \alpha\} \Big|_{U \subseteq M, \beta \in H_n(M_U) : U \text{ の fund. cl.}}$
 を開基として位相を入れた.

③ 各 β : fund. of U に対して $p^{-1}(U) = \langle U, \beta \rangle \cup \langle U, -\beta \rangle$ かつ $p|_{\langle U, \pm\beta \rangle} : \langle U, \pm\beta \rangle \xrightarrow{\text{homeo}} U$ かつ
 (不連結かも知れない) 2重 covering であり. $\tilde{M}$: n -mfd.

④ $\langle U, \beta \rangle$ 上で β を選べば $\tilde{M}$: orientable.

⑤ M の orientation として section $s: M \rightarrow \tilde{M}$ のことであり. 存在する (i.e. orientable かつ)
 $\tilde{M} = s(M) \cup (-s(M))$ かつ 不連結. 逆に, $p|_{\text{連結成分}}$ が 1重 covering であり $\tilde{M}$: ori. なら OK.
 $\leadsto \tilde{M}$: 連結 $\Leftrightarrow M$: not orientable.

Cor.

M : 単連結

or $\Rightarrow M$: orientable.

$\pi_1(M)$ が 指数 2 の部分群を持たない

or orientation $1 \neq 0$ かつ 2 .

$\mathbb{Z}$: 数体環より $H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(M; \mathbb{R})$ があり

$$\mathbb{Z} \cong H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(M; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

$(\mathbb{Z} -)$ orientable $\Rightarrow \mathbb{R}$ -orientable $\Rightarrow \mathbb{Z}_2$ -orientable

いつも成立.